\documentclass[a4paper,12pt]{article} % тип документа

% Русский язык

\usepackage[T2A]{fontenc} % кодировка

\usepackage[utf8]{inputenc} % кодировка

\usepackage{graphicx}

\usepackage[english,russian]{babel} % локализация и переносы

\usepackage{multirow}

% Математика

\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,amsthm,mathtools}

\usepackage{wasysym}

%Заговолок

\author{Глаз Роман Сергеевич\\ Группа Б01-007}

\title{Лабораторная работа 1.1.1\\ Определение систематических и случайных погрешностей при измерении удельного сопротивления нихромовой проволоки}

\date{\today}

\begin{document}

\maketitle

\textbf{Цель работы:} измерить удельное сопротивление проволоки и вычислить систематические и случайные погрешности при использовании таких измерительных приборов, как линейка, штангенциркуль, микрометр, амперметр, вольтметр и мост постоянного тока.\\

\textbf{Используемое оборудование:} линейка, штангенциркуль, микрометр, отрезок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоянного тока, реостат, ключ.\\

\textbf{Используются следующие методы измерений сопротивления:}

1) Определение углового коэффициента наклона зависимости напряжения на проволоке от тока через неё, измеряемых с помощью аналоговых и цифровых вольтметров и амперметров.

2) Измерение с помощью моста постоянного тока. Геометрические размеры образца измеряются с помощью линейки, штангенциркуля и микрометра. Детально исследуется систематические и случайные погрешности проводимых измерений.

В данной работе мы используем оба метода и сравниваем их.\\

\begin{center}

\textbf{Теоретические сведения}

\end{center}

Удельное сопротивленеи проволоки круглого сечения, изготовленного из однородного материала и имеющей всюду одинаковую толщину, может быть определено по формуле

\[\rho = \frac{R\_{\text{пр}}}{L} \frac{\pi d^2}{4}\]

В этой формуле $R$ -- сопротивление измеряемого отрезка проволоки, $d$ -- диаметр проволоки, $L$ -- длина отрезка проволоки.

Так как диаметр проволоки флуктуирует в зависимости от места измерения и толщины, необходимо найти среднее значение толщины по всей длине проволоки. Также необходимо учесть погрешность измеренной средней толщины при подсчёте погрешности удельного сопротивления проволоки.

Сопротивление проволоки можно искать с помощью двух различных (очень схожих) электрических схем:

\begin{center}

{\includegraphics[width=11cm]{qq}}

\end{center}

На данных схемах $R\_V$ и $R\_A$ -- сопротивления вольтметра и амперметра соответственно, а $R$ -- сопротивление реостата.

Для схемы a) имеем:

\[R\_{\text{пр1}} = \frac{V\_a}{I\_a} = R\_{\text{пр}} \frac{R\_V}{R\_V + R\_{\text{пр}}} \]

Здесь $R\_{\text{пр1}}$ -- измеренное сопротивление проволоки по закону Ома без учёта конечности сопротивления вольметра.

Для схемы б) имеем:

\[R\_{\text{пр2}} = \frac{V\_{\text{б}}}{I\_{\text{б}}} = R\_{\text{пр}} + R\_A\]

Здесь $R\_{\text{пр2}}$ -- измеренное сопротивление проволоки по закону Ома без учёта того, что у амперметра есть сопротивление.

Преобразуем оба выражения:

\[R\_{\text{пр}} = R\_{\text{пр1}} \frac{R\_V}{R\_V - R\_{\text{пр1}}} = \frac{R\_{\text{пр1}}}{1 - (R\_{\text{пр1}})/(R\_V)} \cong R\_{\text{пр1}} (1 + \frac{R\_{\text{пр1}}}{R\_V})\]

\[R\_{\text{пр}} = R\_{\text{пр1}} (1 - \frac{R\_A}{R\_{\text{пр2}}})\]

Естественно, использовтаь надо то выражение, которое даёт меньшую поправку на сопротивление.\\

\begin{center}

\textbf{Используемые оборудование и электрическая схема}

\end{center}

Так как известно, что $R\_{\text{пр}}\cong 5$ Ом, оценим по ранее выведенным формулам поправки на сопротивление, учитывая, что $R\_V = 10$ МОм и $R\_A = 0,5$ Ом:

\[\frac{R\_{\text{пр}}}{R\_V} = 5 \cdot 10^{-6}, \text{ } \frac{R\_A}{R\_{\text{пр}}} = 1 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \frac{R\_{\text{пр}}}{R\_V} \ll \frac{R\_A}{R\_{\text{пр}}}\]

Отсюда делаем вывод, что лучше использовать электрическую схему $a)$, так как она даёт значительно меньшую поправку на сопротивление проволоки.

\begin{center}

\begin{tabular}{|c|c|}

\hline

Оборудование & Погрешность измерения \\

\hline

Штангенциркуль & 0,05 мм (маркировка производителя) \\

\hline

Микрометр & 0,01 мм (маркировка производителя) \\

\hline

Вольтметр & $\Delta = (0,003\cdot x + 4k)$, где $x$ -- измер. величина, а $k = 0,1$ мВ \\

\hline

Амперметр & $K\cdot D$, где $K$ -- класс точности, а $D$ -- цена деления \\

\hline

\end{tabular}

\end{center}

\begin{center}

\begin{tabular}{|c|c|c|}

\hline

\multicolumn{3}{|c|}{Характеристики амперметра и вольтметра} \\

\hline

Характеристики & Вольтметр & Амперметр \\

\hline

Система & Цифровая & Электромагнитная \\

\hline

Цена деления & 0,1 мВ & 5 мА \\

\hline

Число делений шкалы & - & 150 \\

\hline

Чувствительность & 10000 дел/В & 200 дел/A \\

\hline

Класс точности & - & 0,5 \\

\hline

Предел измерений & 5 В & 750 мА \\

\hline

Внутреннее сопротивление & 10 МОм & 0,5 Ом \\

\hline

\end{tabular}

\end{center}

\newpage

\begin{center}

\textbf{Результаты измерений диаметра проволоки}

\end{center}

Составим таблицу на основе измеренных данных толщины проволоки с помощью штангенциркуля и микрометра:

\begin{center}

\begin{tabular}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}

\hline

& 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\

\hline

$d\_{10},$ мм & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\

\hline

$d\_{20},$ мм & 0,36 & 0,35 & 0,36 & 0,36 & 0,35 & 0,35 & 0,36 & 0,36 & 0,36 & 0,35 \\

\hline

\end{tabular}

\end{center}

При измерении диаметра проволоки штангенциркулем случайная погрешность измерений отсутствует. Следовательно, точность результата определяется только точностью штангенциркуля (систематической погрешностью):

\[d\_{10} = (0,4 \pm 0,05) \text{ мм}\]

Из полученных значений диаметров следует, что лучше пользоваться микрометром -- он более точный.

Посчитаем среднее значение для $d\_{20}$: $\overline{d\_{20}} = 0,356$ мм.

Для погрешностей имеем:

\[\sigma\_{\text{сл}2} = \frac{1}{N}\sqrt{\sum\_{i = 0}^{n}{(d\_i-\overline{d\_{20}})^2}} = \frac{1}{10} \sqrt{6\cdot 0,004^2 + 4\cdot 0,006^2} = 1,55\cdot 10^{-3} \text{ мм}\]

\[\sigma\_{\text{сист}2} = 0,01 \text{ мм}\]

Поскольку $\sigma\_{\text{сл}2}^2 \ll \sigma\_{\text{сист}2}^2$, можно считать. что проволока однородна по диаметру и погрешность фактически определяется систематической:

\[d\_{20} = \overline{d\_{20}} \pm \sigma\_d = (0,356 \pm 0,01) \text{ мм}\]

Площадь поперечного сечения равна:

\[S = \frac{\pi \overline{d\_{20}}^2}{4} = 99,5\cdot 10^{-3}\text{ мм}^{2}\]

Погрешность определим через формулу погрешностей косвенных измерений:

\[\sigma\_S = \frac{\partial{S}}{\partial{d}}\sigma\_d = \frac{2S}{\overline{d\_{20}}}\sigma\_d = 5,59\cdot 10^{-3}\text{ мм}^{2}\]\\\\\\

\begin{center}

\textbf{Результаты измерений сопротивления проволоки}

\end{center}

Соберём электрческую схему $a)$ и проводим измерения вольт-амперной характеристики для трёх величин расстояния проволоки:\\ $l\_1=(20\pm 0,1)$ см, $l\_2=(30\pm 0,1)$ см, $l\_3=(50\pm 0,1)$ см

Для большей точности измерения вольт-амперной характеристики проведём при возрастающих и убывающих значениях тока. Все показания приборов заносим в таблицу:

\begin{center}

\begin{tabular}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}

\hline

\multicolumn{9}{|c|}{Измерение напряжения и силы тока на проволоке} \\ \hline

\multicolumn{3}{|c|}{$L = 20$ см} & \multicolumn{3}{c|}{$L = 30$ см} & \multicolumn{3}{c|}{$L = 50$ см} \\ \hline

$U$, В & $I$, А & $\Delta U \cdot 10^{-9}$, В & $U$, В & $I$, А & $\Delta U \cdot 10^{-9}$, В & $U$, В & $I$, А & $\Delta U \cdot 10^{-9}$, В \\ \hline

1,531&0,690&124,4&1,252&0,380&71,8 &1,323&0,200&83,4 \\ \hline

0,802&0,365& 22,1&0,639&0,200&12,4 &0,635&0,115&12,2 \\ \hline

0,500&0,230& 6,86&0,422&0,125&4,62 &0,435&0,080&4,72 \\ \hline

0,383&0,175& 3,71&0,310&0,095&2,35 &0,324&0,060&2,48 \\ \hline

0,294&0,130& 2,11&0,267&0,080&1,73 &0,263&0,050&1,71 \\ \hline

0,220&0,095& 1,19&0,222&0,060&1,21 &0,219&0,040&1,18 \\ \hline

0,193&0,085&0,938&0,185&0,055&0,871 &0,191&0,035&0,921 \\ \hline

0,222&0,100& 1,21&0,219&0,060&1,18 &0,220&0,040&1,19 \\ \hline

0,257&0,120& 1,61&0,264&0,080&1,69 &0,258&0,050&1,62 \\ \hline

0,365&0,170& 3,34&0,327&0,100&2,63 &0,317&0,055&2,47 \\ \hline

0,532&0,240& 7,95&0,493&0,140&6,63 &0,400&0,070&4,09 \\ \hline

0,788&0,355& 21,1&0,674&0,200&14,2 &0,519&0,095&7,50 \\ \hline

1,378&0,625& 93,2&1,138&0,340&55,5 &1,042&0,185&43,8 \\ \hline

\end{tabular}

\end{center}

Строим графики зависимостей $U(I)$ для всех для всех трёк длин отрезков проволоки, проводя прямые через экспериментальные точки. Из графиков видно, что нет различия между значениями, полученными при возрастании и при уменьшении тока (нет петли Гистерезиса).

\begin{center}

{\includegraphics[width=16cm]{ww}}

\end{center}

Далее снимаем данные сопротивлений пролоки при разных длинах с помощью моста, записываем в таблицу.

По закону Ома $U=RI$ также нужно вспомнить, что погрешность каждого измерения напряжения $\Delta U$ выражается формулой, приложенной в инструкции к вольтметру:

\[\Delta U = (0,003\cdot U + 0,0004)^{3}\]

Рассчитываем все погрешности напряжения и заносим в таблицу. Также вспоминаем, что погрешность амперметра равна $\Delta I = 0,5 \cdot 5$ мА $= 2,5$ мА -- выражается через класс точности и цену деления.

В данном случае лучше воспользовать методом Пирсона (хи-квадрат), чтобы учесть погрешности отдельных измерений напряжения.

\[R\_{\text{ср}} = \frac{\langle VI \rangle '}{\langle I^2 \rangle '}, \text{ } \sigma\_{R\_{\text{ср}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle U^2 \rangle '}{\langle I^2 \rangle '} - R^2\_{\text{ср}}}\]

Для измеренных данных имеем:

\[R\_{\text{ср}1} = 2,224 \text{ Ом, }R\_{\text{ср}2} = 3,292\text{ Ом, }R\_{\text{ср}3} = 5,395\text{ Ом }\]

\[\sigma\_{R\_{\text{ср}1}} = 0,012 \text{ Ом, }\sigma\_{R\_{\text{ср}2}} = 0,011\text{ Ом, }\sigma\_{R\_{\text{ср}3}} = 0,010\text{ Ом }\]

Данные сопротивлений проволоки, снятые с помощью моста, имеют вид:

\[R\_{\text{мост}1} = 2,211 \text{ Ом, }R\_{\text{мост}2} = 3,281\text{ Ом, }R\_{\text{мост}3} = 5,386\text{ Ом }\]

Видим, что данные сопротивлений, свнятые с помощью моста и с помощью схемы примерно совпадают.

В нашем случае $N = 12$ -- число экспериментальных точек. Погрешность амперметра равна

\[\sigma\_I = 0,5 \cdot 5 \text{ мА} = 2,5 \text{ мА}\]

В методе хи-квадрат мы воспользовались погрешностями напряжений, теперь учтём и погрешность амперметра:

\[\sigma\_{R\_{\text{полн}}} = \sqrt{ \left(\frac{\partial R}{\partial I} \sigma\_I\right)^2 + \sigma\_{R\_{\text{ср}}}^2} = \sqrt{ \left(\frac{R\_{\text{ср}}}{I} \sigma\_I\right)^2 + \sigma\_{R\_{\text{ср}}}^2}\]

Для оценки погрешности возьмём предел измерений силы тока $I =$ $0,750$ А.

Отсюда получаем следующие значения погрешностей:

\[\sigma\_{R\_{\text{полн}1}} = 0,014 \text{ Ом, }\sigma\_{R\_{\text{полн}2}} = 0,016\text{ Ом, }\sigma\_{R\_{\text{полн}3}} = 0,021\text{ Ом }\]

Не забываем внести поправку в значения сопротивлений с помощью формулы:

\[R\_{\text{пр}} = R\_{\text{полн}} (1 + \frac{R\_{\text{полн}}}{R\_V})\]

Так как попроавка очень мала (даже слишком), можно считать, что $R\_{\text{пр}} = R\_{\text{полн}}$ и $\sigma\_{R\_{\text{пр}}} = \sigma\_{R\_{\text{полн}}}$.

Для удобства составим таблицу погрешностей измерения сопротивлений:

\begin{center}

\begin{tabular}{|c|c|c|c|}

\hline

$L$, см & 20 & 30 & 50 \\

\hline

$R\_{\text{полн}}$, Ом & $2,224$ & $3,292$ & $5,395$ \\

\hline

$R\_{\text{пр}}$, Ом & $2,224$ & $3,292$ & $5,395$ \\

\hline

$\sigma\_{R\_{\text{полн}}}$, Ом & $0,014$ & $0,016$ & $0,021$ \\

\hline

$\sigma\_{R\_{\text{пр}}}$, Ом & $0,014$ & $0,016$ & $0,021$ \\

\hline

$\sigma\_{R\_{\text{мост}}}$, Ом & $2,211$ & $3,281$ & $5,386$ \\

\hline

\end{tabular}

\end{center}

\newpage

\begin{center}

\textbf{Обработка данных для поиска удельного сопротивления проволоки}

\end{center}

Удельное сопротивление проволоки и его погрешность определяются формулами:

\[\rho = \frac{R\_{\text{пр}}}{L} \frac{\pi \overline{d\_{20}}^2}{4}, \text{ } \sigma\_{\rho} = \rho \sqrt{\Big( \frac{\sigma\_{R\_{\text{пр}}}}{R\_{\text{пр}}}\Big) ^2 + \Big(\frac{\sigma\_S}{S} \Big)^2 + \Big(\frac{\sigma\_L}{L} \Big)^2}\]

Здесь $\sigma\_{L} = 0,1$ см.

Занесём все результаты в таблицу:

\begin{center}

\begin{tabular}{|c|c|c|c|}

\hline

$L$, см & 20 & 30 & 50 \\

\hline

$\rho \cdot 10^{-5}$, Ом$\cdot$см & $8,69$ & $8,57$ & $8,43$ \\

\hline

$\sigma\_{\rho}\cdot 10^{-6}$, Ом$\cdot$см & $4,93$ & $4,84$ & $4,74$ \\

\hline

\end{tabular}

\end{center}

\begin{center}

\textbf{\\Выводы}

\end{center}

Измерили удельное сопротивление проволоки и вычислили систематические и случайные погрешности при использовании таких измерительных приборов, как линейка, штангенциркуль, микрометр, амперметр, вольтметр и мост постоянного тока.

\end{document}